**Retour à l'applet**

# Ressort hélicoïdal

On considère un ressort hélicoïdal à spires non jointives. Soit L0 sa longueur quand il est horizontal et L1 sa longueur lorsqu'il est vertical et chargé par une masse M. Son allongement résulte de la torsion du fil qui constitue le ressort.
D'après la loi de Hoocke le ressort est soumis à une force de rappel proportionnelle à son allongement et de sens opposé à la force ayant provoqué l'allongement. Si la limite d'élasticité est dépassée, il n'y a plus proportionnalité et le ressort ne retrouve pas sa forme initiale quand on retire la contrainte.

- Si la **masse m0 du ressort est négligeable** devant M on a la relation :
$$F = -Mg = -K(L1 - L0) = -Kx$$
- Si par contre cette masse n'est pas négligeable, on montre que :
$$F = -\left(M + \frac{m0}{2}\right)g = -K(L1 - L0) = -Kx$$

La constante K du ressort s'exprime en N/m. C'est la **raideur** du ressort.

## Associations de ressorts

**Parallèle**

Quand deux ressorts de raideurs K1 et K2 sont associés en parallèle (la fixation de la masse M impose que les deux ressorts s'allongent de la même longueur x) la raideur du ressort équivalent est **K = K1 + K2**

**Série**

Sous l'action de la même contrainte, les allongements s'ajoutent donc la raideur du ressort équivalent est : $\frac{1}{K} = \frac{1}{K1} + \frac{1}{K2}$

## Etude dynamique

Si on écarte la masse M de sa position d'équilibre, elle effectue un mouvement oscillant.

- Si M >> m0 l'équation du mouvement est :
$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \text{ avec } \omega^2 = \frac{K}{M}$$

La période des oscillations est $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$

- Si la masse de ressort ne peut être négligée, on a un système déformable avec propagation. On simplifie le problème en supposant que le ressort a la même forme que lors d'une déformation statique. On utilise la conservation de l'énergie pour déterminer la période du système.

<u>Energie cinétique :</u>

Energie cinétique de M : $\frac{1}{2}M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$

Energie cinétique du ressort :
On découpe le ressort en tranche d'épaisseur dy et de masse dm = m0.y/L. La vitesse d'une tranche est $\frac{dx}{dt}\frac{y}{L}$ son énergie est $\frac{1}{2}m0\frac{dy}{L}\left(\frac{dx}{dt}\frac{y}{L}\right)^2$

En intégrant entre 0 et L, il vient $E_{Cressort} = \frac{1}{6}m0\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$

<u>Energie potentielle :</u>

Pesanteur : -M.g.x - ½.m0.g.x
Traction du ressort ½.K.$(x + L1 - L0)^2$

Conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}\left(M+\frac{m0}{3}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\left(M+\frac{m0}{2}\right).g.x+K\frac{\left(x+L1-L0\right)^2}{2}=\text{Constante}$$

Après dérivation on tire :

$$\left(M+\frac{m0}{3}\right)\frac{d^2x}{dt^2}=\left(M+\frac{m0}{2}\right).g-K(x+L1-L0)$$

Comme x est l'élongation du ressort à partir de sa position d'équilibre statique, on a finalement :

$$\left(M+\frac{m0}{3}\right)\frac{d^2x}{dt^2}=-K.x \quad \Rightarrow \quad T=2\pi\sqrt{\frac{M+\frac{m0}{3}}{K}}$$

Il faut tenir compte d'un terme correctif égal au tiers de la masse du ressort.