Retour à l'applet

Période d'un pendule simple

On considère un pendule simple de longueur L .
On écarte le pendule de l'angle θ_0 de sa position initiale et on le laisse osciller librement. On se limite aux mouvements de faible amplitudes dans un plan et on néglige les frottements.
L'énergie potentielle initiale est donc : Epi = mgL(1 – cosθ_0). L'énergie cinétique est nulle.
Quand l'angle de déviation vaut θ, l'énergie cinétique est :
$Ec = \frac{1}{2} mL^2\dot{\theta}^2$ et l'énergie potentielle : Ep = mgL(1 – cosθ)

En écrivant la conservation de l'énergie, on tire : $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{L}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$

$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow dt = \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \sqrt{\frac{L}{2g\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}d\theta$

La période d'oscillation correspond au double de la durée pour aller de θ_0 à $-\theta_0$
L'expression de la période est donc :

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{2g}}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

C'est une intégrale elliptique de première espèce.
Pour la mettre sous forme canonique, on effectue le changement de variable sinθ/2 = sinθ_0/2.sinφ qui modifie le domaine d'intégration de 0 à θ_0 en 0 à π/2.

On a $d\theta = \frac{2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}d\varphi$

De $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$, on tire $\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0} = \sqrt{2}\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi$

L'expression de la période est donc :

$$\boxed{T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{avec} \quad k = \sin\frac{\theta_0}{2}}$$

Pour k = 0 l'intégrale vaut π/2

On retrouve le fait que pour les petits angles la période du pendule simple est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$